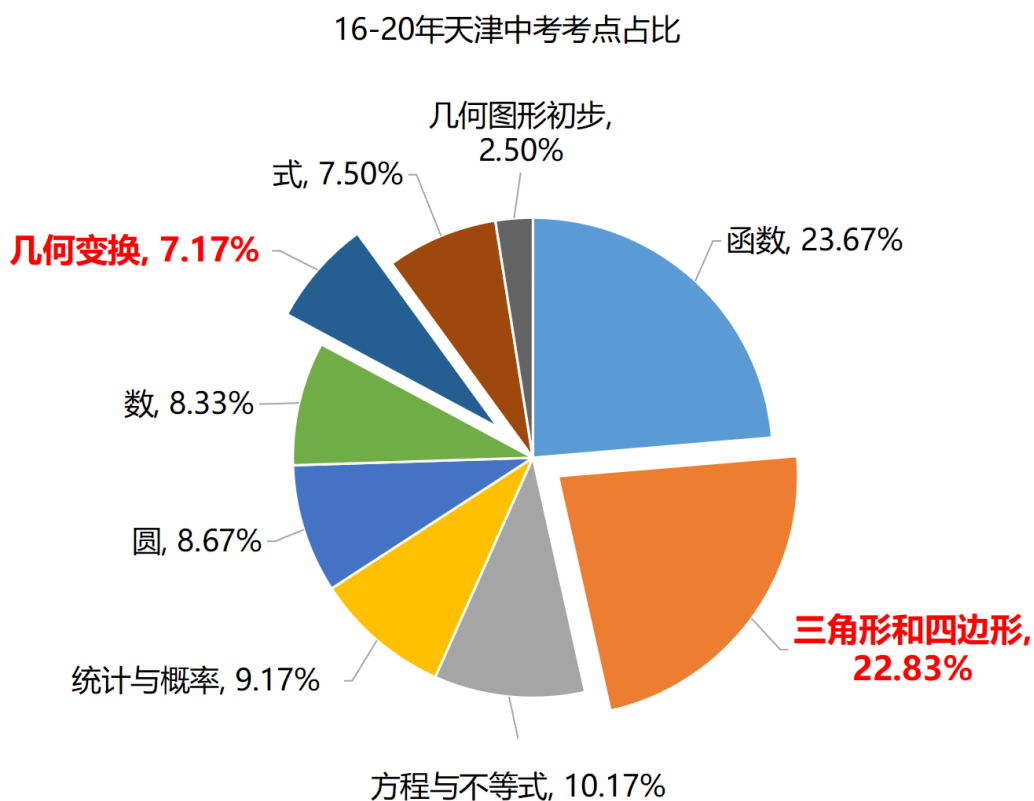


第1讲几何变换之平移

知己知彼

《直角坐标系中的几何变换》属于整个初中数学几何部分的重要知识，包括平移、对称、旋转三大类，综合性较强，需要学生在掌握平面直角坐标系，全等三角形、相似三角形、四边形的性质与判定、函数性质等基础上，进一步探究三大几何变换。本模块的内容在中考中常以24题解答题的形式出现，占10分的分值，题目难度较大，需要学生进行系统的学习、归纳、整理，以提高综合运用能力。

本模块侧重于三大变换的综合应用，适用于几何专题的综合提升，以及直角坐标系中的几何变换的短期突破，故分为几何变换之平移、几何变换之对称、几何变换之旋转 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，突破重点题型。

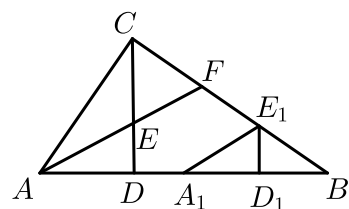


年份	分值	占比	题号	几何变换
2020	10	8%	24	对称变换
2019	10	8%	24	平移变换
2018	10	8%	24	旋转变换
2017	10	8%	24	对称变换
2016	10	8%	24	旋转变换

1. 线段问题

典题精练

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , AF 平分 $\angle CAB$ 交 CD 于 E , 交 BC 于 F .



(1) 求证: $CE = CF$.

(2) 当 $\angle B = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$ 时, 将 $\triangle ADE$ 沿 AB 平移至 $\triangle A_1D_1E_1$ 的位置, 使 E_1 在 BC 上, 求 BE_1 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 2.

【解析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CAF + \angle CFE = 90^\circ,$$

$$\because CD \perp AB \text{ 于 } D,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle CAB \text{ 交 } CD \text{ 于 } E,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle EAD,$$

$$\angle CEF = \angle EAD,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF,$$

$$\therefore CE = CF .$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 ,

$$\because \angle C = 90^\circ , \angle B = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ ,$$

$$\because \angle ADE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ ,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC = \sqrt{3} ,$$

$$\because \angle CAF = \angle EAD = \frac{1}{2} \angle CAD = 30^\circ ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AE ,$$

$$\text{由勾股定理得 : } AE^2 - DE^2 = AD^2 , \text{ 即 : } (2DE)^2 - DE^2 = (\sqrt{3})^2 ,$$

$$\text{解得 : } DE = 1 ,$$

$\therefore \triangle ADE$ 沿 AB 平移至 $\triangle A_1D_1E_1$ 的位置 ,

$$\therefore D_1E_1 = DE = 1 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BD_1E_1$ 中 ,

$$\because \angle B = 30^\circ ,$$

$$\therefore BE_1 = 2D_1E_1 = 2 .$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

2. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形 , $AB = 6$, 将一块含有 30° 角的直角三角板 DEF 如图所示放置 , 让等边 $\triangle ABC$ 向右平移 (BC 只能在 EF 上移动) . 如图1 , 当点 E 与点 B 重合时 , 点 A 恰好落在三角板 DEF 的斜边 DF 上 .

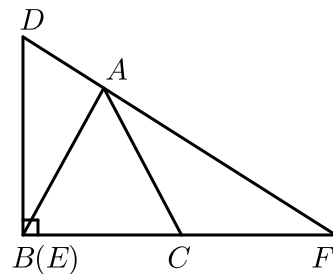
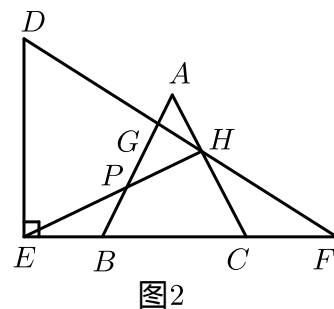


图1

- (1) 若点 C 平移到与点 F 重合 , 求等边 $\triangle ABC$ 平移的距离 ;
- (2) 在等边 $\triangle ABC$ 向右平移的过程中 , AB , AC 与三角板斜边的交点分别为 G , H , 连接 EH 交 AB 于点 P , 如图2 .



- ① 求证： $EB = AH$ ；
- ② 若 $\angle HEF = 30^\circ$ ，求 EH 的长；
- ③ 判断 PG 的长度在等边 $\triangle ABC$ 平移的过程中是否会发生变化？如果不变，请求出 PG 的长；如果变化，请说明理由。

【答案】（1）点 C 平移到与点 F 重合时，等边 $\triangle ABC$ 平移的距离为6。

（2）① 证明见解析。

② $EH = 4\sqrt{3}$ 。

③ 不变；3。

【解析】（1）解：等边 $\triangle ABC$ 未平移时，如图1，

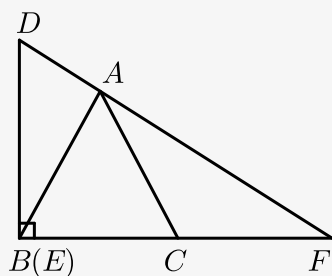


图1

$$\because \angle ABC = 60^\circ, BD \perp BF,$$

$$\therefore \angle DBA = 30^\circ,$$

$$\because \angle BDF = 60^\circ,$$

$$\therefore BA \perp DF,$$

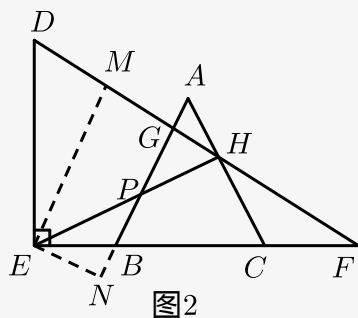
$$\therefore 2AB = BF = BC + CF,$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore CF = AB = 6,$$

即：点 C 平移到与点 F 重合时，等边 $\triangle ABC$ 平移的距离为6。

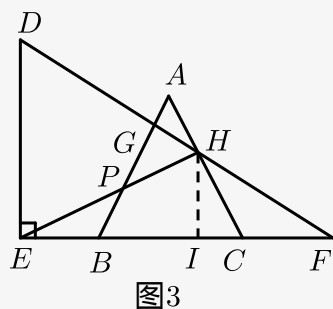
（2）① 证明：作 $EM \perp DF$ 于点 M ， $EN \perp AB$ 于点 N ，如图2，



由(1)知 $AB \perp DF$,
 $\therefore MENG$ 是矩形 ,
 $\therefore GN = EM = AB$,
 $\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $\angle DFE = 30^\circ$,
 $\therefore \angle CHF = 30^\circ$,
 $\therefore \angle AHG = 30^\circ$,
 $\therefore EN \parallel DF$,
 $\therefore \angle BEN = 30^\circ = \angle AHG$,
 $\therefore AG + GB = AB$,
 $BN + GB = NG = AB$,
 $\therefore BN = AG$,
 在 $\triangle EBN$ 和 $\triangle HAG$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle BEN = \angle AHG \\ \angle ENB = \angle AHG \\ AG = BN \end{cases}$$
 $\therefore \triangle EBN \cong \triangle HAG (\text{AAS})$,
 $\therefore EB = AH$.

② 如图3, 作 $HI \perp EF$ 于点 I ,


$$\begin{aligned} \therefore \angle HEF &= 30^\circ = \angle HFE, \\ \therefore IE &= IF, \\ \text{由(1)知 } EF &= 2AB = 12, \\ \therefore IE &= 6, \\ \therefore IH &= 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\therefore EH = 4\sqrt{3}.$$

③ 不变，如图2，

$$\therefore \triangle EBN \cong \triangle HAG,$$

$$\therefore GH = NE,$$

在 $\triangle ENP$ 和 $\triangle HGP$ 中，

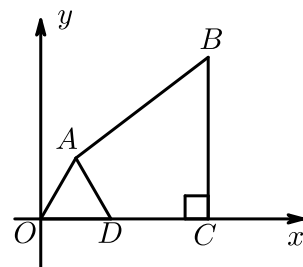
$$\begin{cases} \angle ENP = \angle HGP \\ \angle EPN = \angle HPG \\ EN = HG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ENP \cong \triangle HGP (\text{AAS}),$$

$$\therefore GP = NP = \frac{1}{2}NG = \frac{1}{2}AB = 3.$$

【标注】【知识点】平移构造特殊图形

3. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点 O 为坐标原点，点 C 在 x 轴的正半轴上，且 $BC \perp OC$ 于点 C ，点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ ， $AB = 4\sqrt{3}$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，点 D 是线段 OC 上一点，且 $OD = 4$ ，连接 AD 。



- (1) 求证： $\triangle AOD$ 是等边三角形。
- (2) 求点 B 的坐标。
- (3) 平行于 AD 的直线 l 从原点 O 出发，沿 x 轴正方向平移。设直线 l 被四边形 $OABC$ 截得的线段长为 m ，直线 l 与 x 轴交点的横坐标为 t 。
 - ① 当直线 l 与 x 轴的交点在线段 CD 上（交点不与点 C ， D 重合）时，请直接写出 m 与 t 的函数关系式（不必写出自变量 t 的取值范围）。
 - ② 若 $m = 2$ ，请直接写出此时直线 l 与 x 轴的交点坐标。

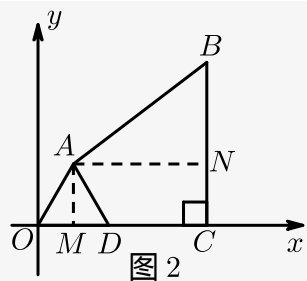
【答案】(1) 证明见解析。

(2) 点 B 的坐标为 $(8, 4\sqrt{3})$ 。

(3) ① $m = \frac{1}{2}t + 2$ 。

② $(2, 0)$ ， $(\frac{32}{3}, 0)$ 。

【解析】(1) 如图2，过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M ，



$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$,

$\therefore OM = 2, AM = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AOM$ 中, $\tan \angle AOM = \frac{AM}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore \angle AOM = 60^\circ$

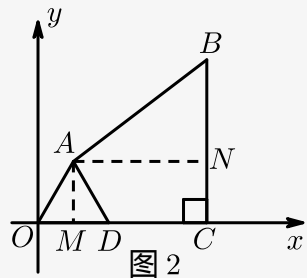
由勾股定理得, $OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\therefore OD = 4,$

$\therefore AO = OD,$

$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形.

(2) 如图2, 过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N ,



$\therefore BC \perp OC, AM \perp x$ 轴,

$\therefore \angle BCM = \angle CMA = \angle ANC = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为矩形,

$\therefore AN = MC, AM = NC,$

$\therefore \angle B = 60^\circ, AB = 4\sqrt{3},$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中,

$$AN = AB \cdot \sin B = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,$$

$$BN = AB \cdot \cos B = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore AN = MC = 6, CN = AM = 2\sqrt{3},$

$\therefore OC = OM + MC = 2 + 6 = 8,$

$BC = BN + CN = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(8, 4\sqrt{3})$.

(3) ① 如图3, $m = \frac{1}{2}t + 2$.

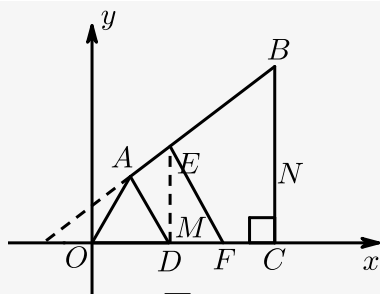


图 3

② 如图4, $(2,0)$, $(\frac{32}{3},0)$.

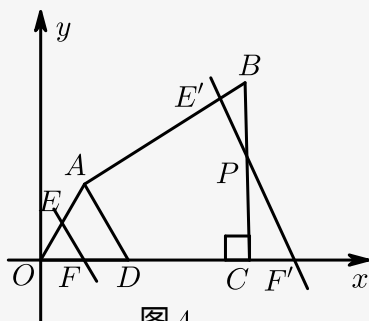


图 4

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

2. 线段和差问题

典题精练

4. 在平面直角坐标系中, 点 $A(4,0)$ 、 B 为第一象限内一点, 且 $\triangle OAB$ 为等边三角形, C 为 OB 的中点, 连接 AC .

(1) 如图①, 求点 C 的坐标.

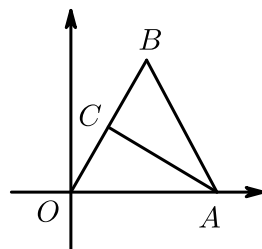


图 ①

(2) 如图②, 将 $\triangle OAC$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DEF$, 设 $OD = m$, 其中 $0 < m < 4$.

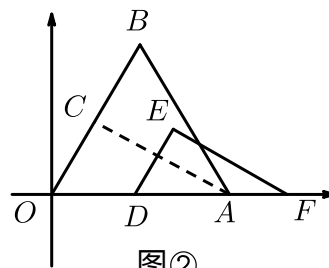
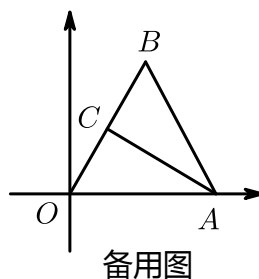


图 ②

① 设 $\triangle OAB$ 与 $\triangle DEF$ 重叠部分的面积为 S ，用含 m 的式子表示．

② 连接 BD ， BE ，当 $BD + BE$ 取最小值时，求点 E 的坐标．（直接写结果即可）



【答案】（1） $(1, \sqrt{3})$ ．

$$(2) \textcircled{1} S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}(8 - m^2), & (0 < m \leq 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - m)^2, & (2 < m < 4) \end{cases} .$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{7}{3}, \sqrt{3} \right) .$$

【解析】（1）如图，过 C 作 $OH \perp OA$ ，垂足为 H ．

$\because OA = 4$ ， $\triangle OAB$ 为等边三角形，

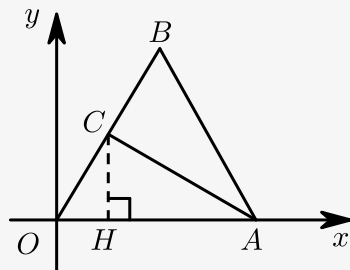
$\therefore \angle BAO = 60^\circ$ ， $OB = 4$ ．

$\because C$ 为 OB 的中点，

$\therefore OC = 2$ ， $\angle OCA = 90^\circ$ ．

$\therefore OH = 1$ ， $CH = \sqrt{3}$ ．

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ．



（2） $\textcircled{1} \because \triangle DEF$ 是 $\triangle OCA$ 平移得到的，

$\therefore AF = OD = m$ ．

当 $0 < m \leq 2$ 时，如图，

设 AB 与 EF 交于点 G ，过点 A 作 $AI \perp EF$ ，垂足为 I ．

$\because \angle BAF = 120^\circ$ ， $\angle DFE = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AGF = 30^\circ$ ．

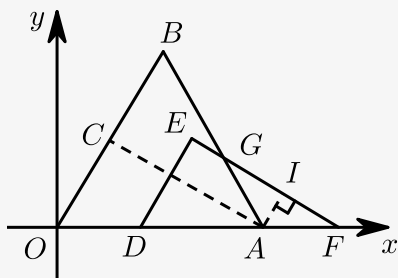
$\therefore AI = \frac{1}{2}m$ ， $GF = 2FI = \sqrt{3}m$ ．

$\therefore S = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle AGF} = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}m^2$ ．

当 $2 < m < 4$ 时，如图，

设 AB 与 DE 交于点 K ，

$\therefore \angle KDA = \angle KAD = 60^\circ$ ，



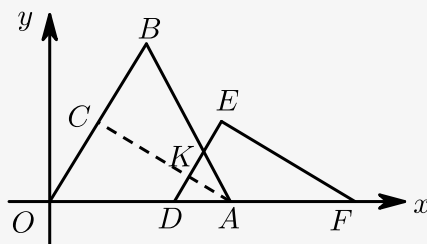
$\therefore \triangle KAD$ 为等边三角形 .

$\therefore DA = 4 - m$,

$$\therefore S = S_{\triangle KAD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4 - m)^2 .$$

综上所述 ,

$$S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} (8 - m^2), & (0 < m \leq 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4} (4 - m)^2, & (2 < m < 4) \end{cases} .$$



② 当 $0 < m \leq 2$ 时 , 如图4 ,

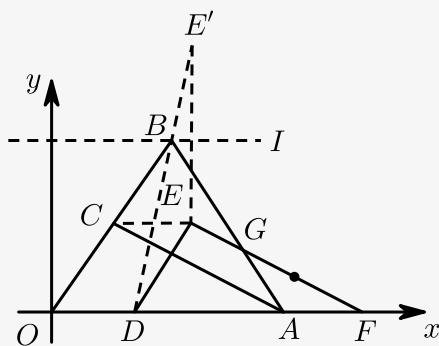


图 4

过点 B 作直线 $l \parallel x$ 轴 , 作点 E 关于直线 l 的对称点 E' , 直线 l 的解析式为

$$y = 2\sqrt{3} , \text{ 连结 } BE , BE' ,$$

$$\therefore BE = BE' ,$$

$$\therefore BD + BE = BD + BE' , \text{ 要使 } BD + BE \text{ 最小 ,}$$

$$\therefore BD + BE' \text{ 最小 ,}$$

即 : 点 D , B , E' 三点共线 .

$\therefore \triangle OAC$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DFE$, 设 $OD = m$,

$$\therefore CE = OD = m , D(m, 0) ,$$

$$\text{由(1)知 , } C(1, \sqrt{3}) ,$$

$$\therefore E(m + 1, \sqrt{3}) .$$

$\therefore$ 点 E 关于直线 l 的对称点 E' ,

$$\therefore E'(m + 1, 3\sqrt{3}) ,$$

由点 $D(m, 0) , E'(m + 1, 3\sqrt{3})$, 得出直线 DE' 的解析式为

$$y = 3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}m .$$

$\therefore$ 点 B 在直线 DE' 上 ,

$$\therefore 3\sqrt{3} \times 2 - 3\sqrt{3}m = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore m = \frac{4}{3} ,$$

$$\therefore E\left(\frac{7}{3}, \sqrt{3}\right).$$

当 $2 < m < 4$ 时, 作点 E 关于直线 l 的对称点 E' ,

连接 BE, BE' ,

$$\therefore BE = BE',$$

$\therefore BD + BE = BD + BE'$, 要使 $BD + BE$ 最小,

$\therefore BD + BE'$ 最小,

即: 点 D, B, E' 三点共线,

$\therefore \triangle OAC$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DFE$, 设 $OD = m$,

$$\therefore CE = OD = m, D(m, 0),$$

由 (1) 知, $C(1, \sqrt{3})$,

$$\therefore E(m+1, \sqrt{3}),$$

$\therefore$ 点 E 关于直线 l 的对称点 E' ,

$$\therefore E'(m+1, \sqrt{3}),$$

由点 $D(m, 0), E'(m+1, \sqrt{3})$, 得出直线 DE' 的解析式为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}m$

,

$\therefore$ 点 B 在直线 DE' 上,

$$\therefore \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3}m = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore m = 0 \text{ (舍去)}$$

$\therefore$ 当 $BD + BE$ 取最小值时, 点 E 的坐标为 $\left(\frac{7}{3}, \sqrt{3}\right)$.

【标注】【思想】数形结合思想

【思想】分类讨论思想

【知识点】轴对称的性质

【知识点】解直角三角形

【知识点】等边三角形的性质

【能力】分析和解决问题能力

5. 如图1, 点 C 是线段 AB 上一点, 将 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 CE , 将 CB 绕点 C 旋转, 使点 B 的对应点 D 落在 CE 上, 连接 BE, AD , 并延长 AD 交 BE 于点 F .

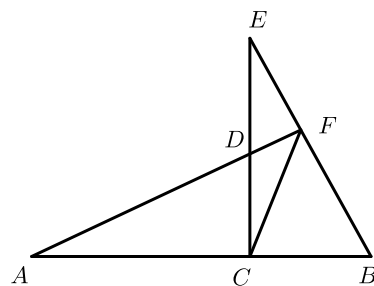


图1

- (1) 求证： $AF \perp BE$.
- (2) 连接 CF ，猜想 AF ， EF ， CF 存在的等量关系，并证明你猜想的结论 .
- (3) 如图2，延长 AB 到 G ，使 $BG = CB$ ，将线段 BG 沿直线 BE 上下平移，平移后的线段记为 $B'G'$ ，若 $\angle ABE = 60^\circ$ ，当 $CB' + CG'$ 的值最小时，请直接写出 $\tan \angle G'CG$ 的值 .

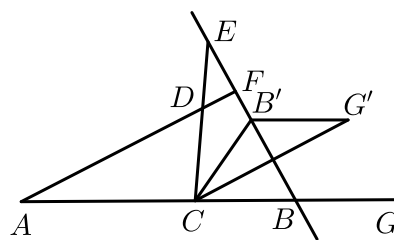


图2

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $AF = EF + \sqrt{2}CF$ ，证明见解析 .

(3) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

【解析】 (1) $\because$ 线段 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 CE ，

$$\therefore CA = CE, \angle ACE = 90^\circ,$$

$\because$ 线段 CB 绕点 C 旋转， B 点的对应点 D 落在 CE 上，

$$\therefore CB = CD, \angle BCD = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ECB$ 中，

$$\begin{cases} AC = EC \\ \angle ACD = \angle ECB, \\ CD = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ECB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CEB,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle EDF,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DFE = 90^\circ,$$

$$\therefore AF \perp BE.$$

(2) 在 AD 上截取 $AM = EF$ ，连接 CM ，

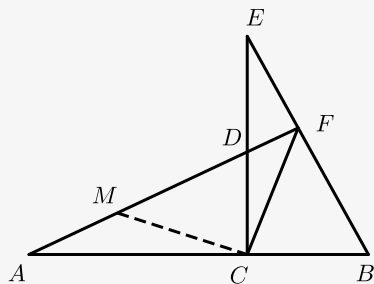


图1

由 (1) 可知, $\angle CAM = \angle CEF$,

在 $\triangle CAM$ 和 $\triangle CEF$ 中,

$$\begin{cases} AC = EC \\ \angle CAM = \angle CEF, \\ AM = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAM \cong \triangle CEF$ (SAS),

$\therefore \angle ACM = \angle ECF, CM = CF$,

$\because \angle ACM + \angle MCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECF + \angle MCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle MCF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CMF$ 是等腰直角三角形,

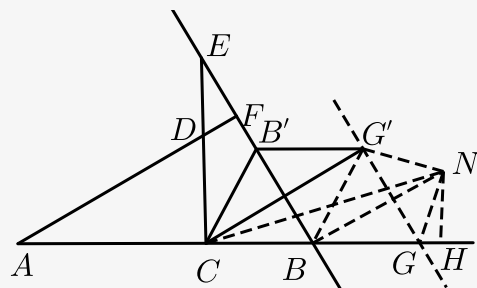
$\therefore MF = \sqrt{2}CF$,

$\therefore AF = AM + MF = EF + \sqrt{2}CF$,

即 $AF = EF + \sqrt{2}CF$.

(3) 作直线 GG' , 过 B 作 GG' 的对称点 N , 过 N 作 $NH \perp CG$ 交 CG 延长线于 H .

连接 CN 、 NG 、 BG' 、 NG' ,



$\because$ 线段 BG 沿直线 BE 上下平移, 平移后的线段记为 $B'G'$,

$\therefore BG = B'G', BG \parallel B'G'$,

$\therefore$ 四边形 $BB'G'G$ 是平行四边形,

$\therefore BB' \parallel GG'$,

$\therefore \angle ABE = \angle BGG' = 60^\circ$,

$\because B$ 、 N 关于 GG' 对称,

$\therefore BG = NG, BG' = NG'$,

$$\angle BGG' = \angle NGG' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle NGH = 60^\circ,$$

$$\because BG = CB = B'G', B'G' \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCB'G'$ 也是平行四边形,

$$\therefore CB' = BG',$$

$$\therefore CB' + CG' = BG' + CG' = NG' + CG' \geq CN.$$

$\therefore$ 当且仅当 C, G', N 三点共线时, $CB' + CG'$ 取得最小值.

在 $\text{Rt}\triangle NGH$ 中, $\angle NHG = 90^\circ$, $\angle NGH = 60^\circ$,

设 $GH = a$, 则 $NH = \sqrt{3}a$, $GN = 2a$,

$$\therefore GN = BG = BC = 2a,$$

$$\therefore CG = 4a, CH = 5a,$$

当 $CB' + CG'$ 的值最小时,

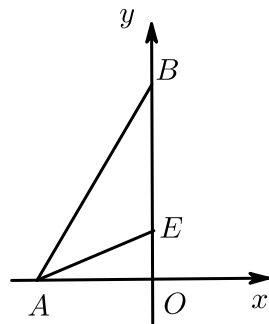
$$\text{则 } \tan \angle G'CG = \frac{NH}{CH} = \frac{\sqrt{3}a}{5a} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

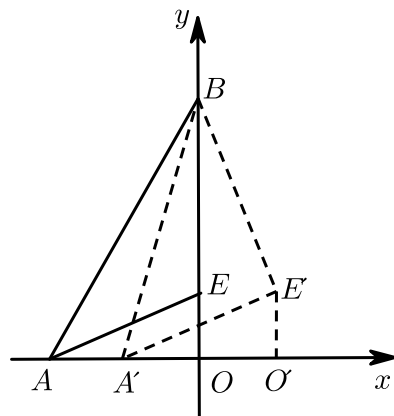
经典再现

6. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-2, 0)$, 点 $B(0, 4)$, 点 E 在 OB 上, 且 $\angle OAE = \angle OBA$.

(1) 如图, 求点 E 的坐标.



(2) 如图, 将 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle A'E'O'$, 连接 $A'B$ 、 BE' .



- ① 设 $AA' = m$ ，其中 $0 < m < 2$ ，试用含 m 的式子表示 $A'B^2 + BE'^2$ ，并求出使 $A'B^2 + BE'^2$ 取得最小值时点 E' 的坐标。
- ② 当 $A'B + BE'$ 取得最小值时，求点 E' 的坐标。（直接写出结果即可）

【答案】 (1) 点 E 的坐标为 $(0, 1)$ 。

(2) ① 点 E' 的坐标是 $(1, 1)$ 。

② 点 E' 的坐标是 $(\frac{6}{7}, 1)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 4)$ ，

$$\therefore OA = 2, OB = 4.$$

$$\because \angle OAE = \angle OBA, \angle EOA = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAE \sim \triangle OBA,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OA}, \text{ 即 } \frac{2}{4} = \frac{OE}{2}, \text{ 解得 } OE = 1,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (0, 1).$$

(2) ① 如图，连接 EE' 。

$$\text{由题设知 } AA' = m \ (0 < m < 2),$$

$$\text{则 } A'O = 2 - m.$$

在 $\text{Rt}\triangle A'BO$ 中，

$$\text{由 } A'B^2 = A'O^2 + BO^2,$$

$$\text{得 } A'B^2 = (2 - m)^2 + 4^2 = m^2 - 4m + 20.$$

$\because \triangle A'E'O'$ 是 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到的，

$$\therefore EE' \parallel AA', \text{ 且 } EE' = AA'.$$

$$\therefore \angle BEE' = 90^\circ, EE' = m.$$

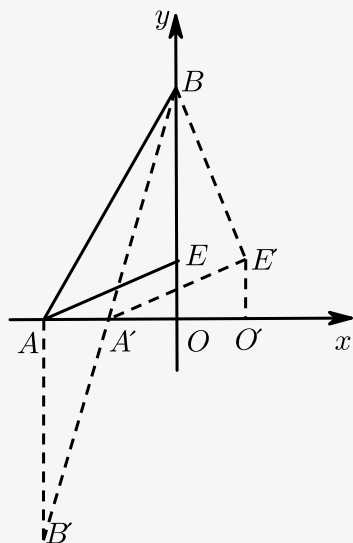
$$\text{又 } BE = OB - OE = 3,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BE'E \text{ 中, } BE'^2 = E'E^2 + BE^2 = m^2 + 9,$$

$$\therefore A'B^2 + BE'^2 = 2m^2 - 4m + 29 = 2(m-1)^2 + 27.$$

当 $m = 1$ 时, $A'B^2 + BE'^2$ 可以取得最小值,

此时, 点 E' 的坐标是 $(1, 1)$.



② 如图, 过点 A 作 $AB' \perp x$, 并使 $AB' = BE = 3$.

易证 $\triangle AB'A' \cong \triangle EBE'$,

$$\therefore B'A = BE',$$

$$\therefore A'B + BE' = A'B + B'A'.$$

当点 B 、 A' 、 B' 在同一条直线上时,

$A'B + B'A'$ 最小,

即此时 $A'B + BE'$ 取得最小值.

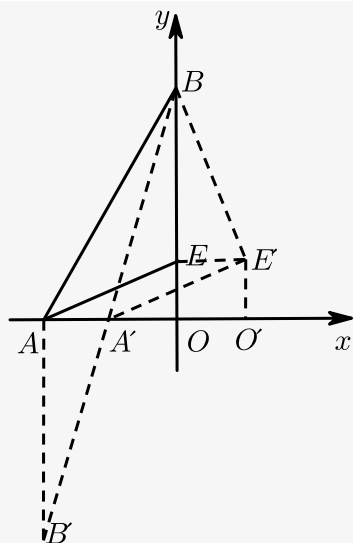
易证 $\triangle AB'A' \sim \triangle OBA'$,

$$\therefore \frac{AA'}{A'O} = \frac{AB'}{OB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AA' = \frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{7},$$

$$\therefore EE' = AA' = \frac{6}{7},$$

$$\therefore \text{点 } E' \text{ 的坐标是 } \left(\frac{6}{7}, 1\right).$$



【标注】【知识点】坐标系中的平移

【重点强调】

2013年天津中考真题第25题（10分）

（2）①求出的表达式为二次函数形式，可根据范围求取最值

②同第2题

可采用两种方法：

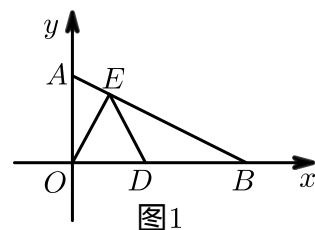
1. 用点的坐标公式表示线段和，再利用数形结合的方式，将线段转化成勾股定理构造的方法求解
2. 将动点D、E通过三角形构造的方式转移到一起，从而转化成两个定点一个动点求最小值的问题

3. 重叠部分面积

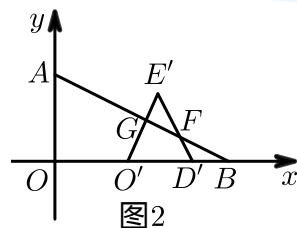
典题精练

7. 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ， $OB = 4$ ，分别以 OA 、 OB 边所在的直线建立平面直角坐标系， D 为 x 轴正半轴上一点，以 OD 为一边在第一象限内作等边 $\triangle ODE$ 。

（1）如图1，当 E 点恰好落在线段 AB 上时，求 E 点坐标。



（2）在（1）问的条件下，将 $\triangle ODE$ 沿 x 轴的正半轴向右平移得到 $\triangle O'D'E'$ ， $O'E'$ 、 $D'E'$ 分别交 AB 于点 G 、 F （如图2）求证 $OO' = E'F$ 。



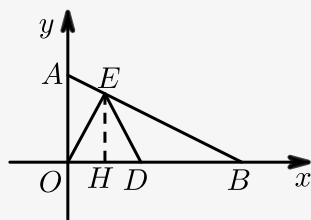
- (3) 若点 D 沿 x 轴正半轴向右移动, 设点 D 到原点的距离为 x , $\triangle ODE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 y , 请直接写出 y 与 x 的函数关系式.

【答案】(1) $E(1, \sqrt{3})$.

(2) 证明见解析.

$$(3) \quad y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, & 0 < x \leq 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}, & 2 < x < 4 \\ 2\sqrt{3}, & x \geq 4 \end{cases}$$

【解析】(1) 作 $EH \perp OB$ 于点 H ,



$$\tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ,$$

$\therefore \triangle OED$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EOD = 60^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle ABO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OEB = 90^\circ.$$

$$\because BO = 4,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OB = 2.$$

$\therefore \triangle OEH$ 是直角三角形, 且 $\angle OEH = 30^\circ$

$$\therefore OH = 1, EH = \sqrt{3}.$$

$$\therefore E(1, \sqrt{3}).$$

$$(2) \because \angle ABO = 30^\circ, \angle EDO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle DFB = 30^\circ,$$

$$\therefore D'F = D'B.$$

$$\therefore OO' = 4 - 2 - D'B = 2 - D'B = 2 - D'F$$

$$= E'D' - FD' = E'F.$$

(3) 当 $0 < x \leq 2$ 时, $\triangle ODE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 $\triangle ODE$ 面积 $= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,

当 $2 < x < 4$ 时, $\triangle ODE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为四边形 $GO'DF$ 面积

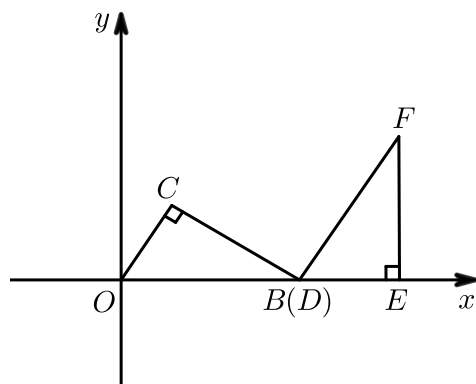
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3},$$

当 $x \geq 4$ 时, $\triangle ODE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 $2\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

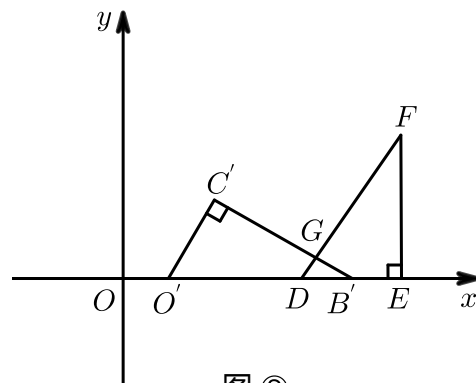
8. 在平面直角坐标系中, 两个形状、大小完全相同的三角板 OBC , DEF , 按如图所示的位置摆放, O 为原点, 点 $B(12, 0)$, 点 B 与点 D 重合, 边 OB 与边 DE 都在 x 轴上. 其中, $\angle C = \angle DEF = 90^\circ$, $\angle OBC = \angle F = 30^\circ$.

(1) 如图①, 求点 C 坐标.



图①

- (2) 现固定三角板 DEF , 将三角板 OBC 沿 x 轴正方向平移, 得到 $\triangle O'B'C'$, 当点 O' 落点 D 上时停止运动, 设三角板平移的距离为 x , 两个三角板重叠部分的面积为 y . 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.



图②

- (3) 在(2)条件下, 设边 BC 的中点为点 M , 边 DF 的中点为点 N . 直接写出在三角板平移过程中, 当点 M 与点 N 之间的距离最小时, 点 M 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】(1) $C(3, 3\sqrt{3})$.

$$(2) \quad y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 (0 < x \leq 6) \\ \frac{\sqrt{3}}{24}x^2 + 2\sqrt{3}x - 6\sqrt{3} (6 < x \leq 12) \end{cases}.$$

$$(3) \quad M\left(15, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

【解析】(1) 如图①, 求点 C 坐标.

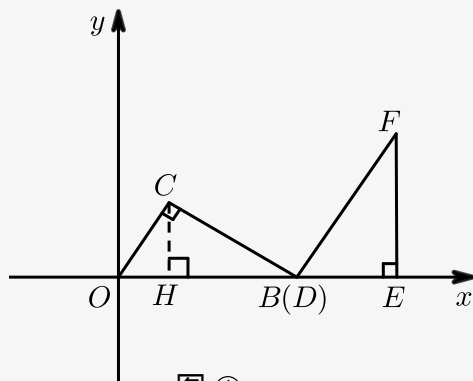


图 ①

作 $CH \perp OB$ 于 H .

$$\because \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 60^\circ,$$

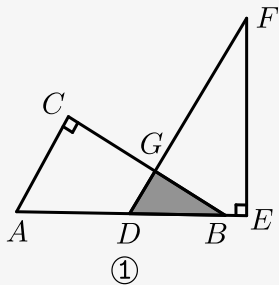
$$\therefore OC = OB \sin 30^\circ = 6,$$

$$OH = OC \cos 60^\circ = 3,$$

$$\therefore CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore C(3, 3\sqrt{3}).$$

(2) 当 $0 < x \leq 6$ 时, 如图①所示,



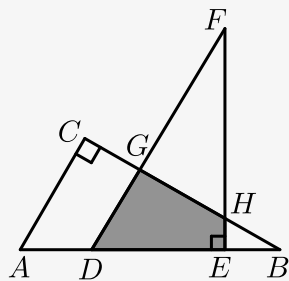
①

因为 DB 为 x , 则 $DG = \frac{1}{2}x$,

$$BG = \frac{DG}{\tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}DG \cdot BG = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2.$$

当 $6 < x \leq 12$ 时, 如图②所示.



②

$$\because BE = x - 6, HE = BE \cdot \tan 30^\circ = (x - 6) \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 6).$$

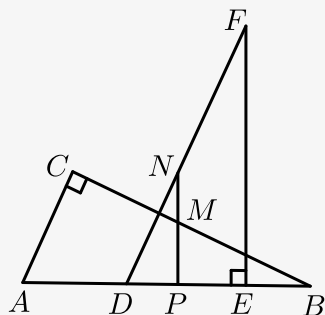
$$\therefore S_{\triangle HEB} = \frac{1}{2} BE \cdot EH = \frac{1}{2}(x - 6) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 6) = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 - 2\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}.$$

$$\therefore y = S_{\triangle BGD} - S_{\triangle HEB} = \frac{\sqrt{3}}{24}x^2 + 2\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}.$$

综上所述,

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 (0 < x \leq 6) \\ \frac{\sqrt{3}}{24}x^2 + 2\sqrt{3}x - 6\sqrt{3} (6 < x \leq 12) \end{cases}.$$

(3)



⑤

如图⑤所示, 当 $MN \perp BD$ 时, MN 最小,

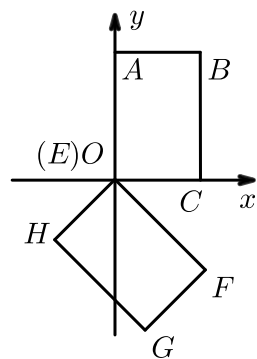
$$\text{由题意可知: } DN = FN = \frac{1}{2}DF = 6, DP = \frac{1}{2}DN = 3, \text{ 则 } PN = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{由题意可知: } BM = CM = \frac{1}{2}BC = 3\sqrt{3}, \text{ 则 } PM = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$\therefore M\left(15, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

9. 如图, 矩形 $OABC$ 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 $A(0, 4)$, $C(2, 0)$, 将矩形 $OABC$ 绕点 O 顺时针方向旋转 135° , 得到矩形 $EFGH$ (点 E 与 O 重合).



(1) 若 GH 交 y 轴于点 M ，则 $\angle FOM = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $OM = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 将矩形 $EFGH$ 沿 y 轴向上平移 t 个单位。

① 直线 GH 与 x 轴交于点 D ，若 $AD \parallel BO$ ，求 t 的值。

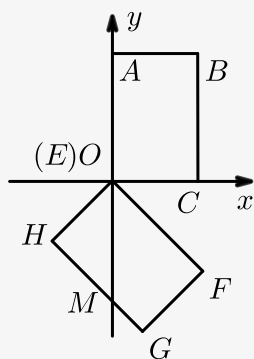
② 若矩形 $EFGH$ 与矩形 $OABC$ 重叠部分的面积为 S 个平方单位，试求当 $0 < t \leq 4\sqrt{2} - 2$ 时， S 与 t 之间的函数关系式。

【答案】 (1) 45° ; $2\sqrt{2}$

(2) ① $t = 2\sqrt{2} - 2$ 。

$$\textcircled{2} \quad S = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & (0 < t \leq 2) \\ 2t - 2 & (2 < t \leq 2\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2(\sqrt{2} + 1)t - 6 & (2\sqrt{2} < t \leq 4\sqrt{2} - 2) \end{cases}.$$

【解析】 (1) 如图，



$$\therefore \angle AOF = 135^\circ,$$

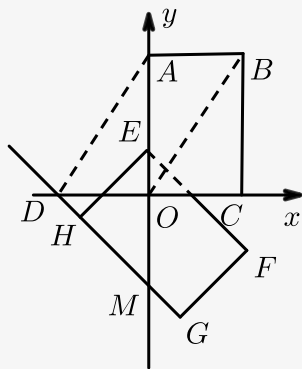
$$\therefore \angle FOM = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ, \angle MOH = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle MOH$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore OH = OC = 2,$$

$$\therefore OM = 2\sqrt{2}.$$

(2) ① 如图，连接 AD ， BO ，



$\therefore AD \parallel BO, AB \parallel OD,$
 $\therefore$ 四边形 $ADOB$ 是平行四边形,
 $\therefore OD = AB = 2,$
 由平移可知, $\angle HEM = 45^\circ,$
 $\therefore \angle OMD = \angle ODM = 45^\circ,$
 $\therefore OM = OD = 2,$
 由平移可知: $EM = 2\sqrt{2},$
 $\therefore$ 矩形 $EFGH$ 平移 $t = 2\sqrt{2} - 2.$

② 有三种情况:

当 $0 < t \leq 2$ 时, 重叠部分为等腰直角三角形, 如图1, 此时 $OE = t,$ 则

$$S = \frac{1}{2}t^2,$$

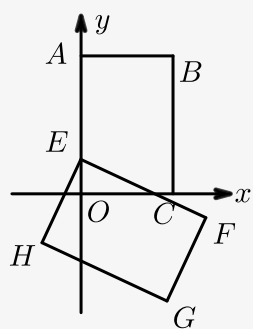


图 1

当 $2 < t \leq 2\sqrt{2}$ 时, 重叠部分是四边形, 如图2, 此时

$$S = \frac{1}{2}(t + t - 2) \times 2 = 2t - 2,$$

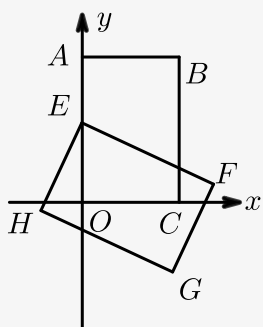


图 2

当 $2\sqrt{2} < t \leq 4\sqrt{2} - 2$ 时, 重叠部分是五边形, 如图3, 此时

$$S = (2t - 2) - \frac{1}{2}(t - 2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}t^2 + 2(\sqrt{2} + 1)t - 6,$$

$$\text{所以 } S = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & (0 < t \leq 2) \\ 2t - 2 & (2 < t \leq 2\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2(\sqrt{2} + 1)t - 6 & (2\sqrt{2} < t \leq 4\sqrt{2} - 2) \end{cases}.$$

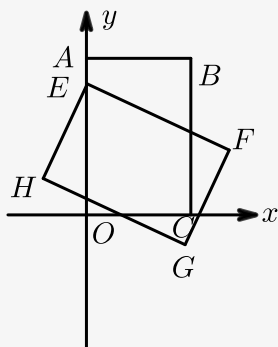


图 3

【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】坐标系中的旋转-图形关于原点的旋转

【知识点】坐标系中的平移-图形的平移

【知识点】平行四边形的判定及应用

【知识点】等腰直角三角形的性质

10. 如图(1), 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$. 沿 x 轴向右平移 $\text{Rt}\triangle ABO$, 得 $\text{Rt}\triangle A'B'O'$, 直线 $O'B'$ 与 AB 或 BA 的延长线相交于点 D . 设 $D(x, y) (x > 0)$, 以点 A, A', B', D 为顶点的四边形面积记为 S .

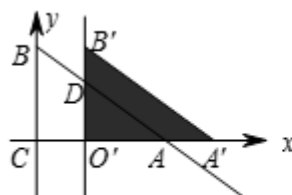


图 (1)

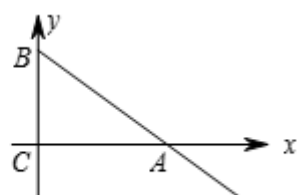


图 (2)

- (1) 求 y 与 x 的函数关系式.
- (2) 用含 $x (x \neq 4)$ 的式子表示 S .
- (3) 当 $S = \frac{10}{3}$, 求点 D 的坐标 (直接写出结果). (图2为备用图)

【答案】(1) $y = -\frac{3}{4}x + 3$

$$(2) S = \begin{cases} -\frac{3}{8}x^2 + 3, & 0 < x < 4 \\ \frac{3}{8}x^2, & x > 4 \end{cases}$$

$$(3) D\left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

【解析】(1) ∵ 直线 $O'B'$ 与 AB 或 BA 的延长线相交于点 D ,

∴ 点 D 在 AB 或 BA 的延长线上,

∵ 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$,

∴ 设 y 与 x 的函数关系式为: $y = kx + b$,

$$\text{即: } \begin{cases} 0 = 4k + b \\ 3 = b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ 3 = b \end{cases},$$

∴ y 与 x 的函数关系式为 $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

当点 O' 与点 A 不重合时,

∵ $B'O' \parallel OB$,

∴ $\triangle ADO' \sim \triangle ABO$.

$$\therefore \frac{DO'}{BO} = \frac{AO'}{AO}.$$

如图(1), 点 D 在 AB 上,

有 $AO' = AO - O'O = 4 - x$.

$$\therefore \frac{y}{3} = \frac{4-x}{4}.$$

$$\text{即: } y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

如图, 点 D 在 BA 延长线上,

有 $AO' = O'O - AO = x - 4$.

$$\therefore \frac{-y}{3} = \frac{x-4}{4}.$$

$$\text{即: } y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

当点 O' 与点 A 重合时, D 与 A 重合, 此时, $x = 4$, $y = 0$.

∴ y 与 x 的关系是: $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

(2) ①如图(1), 当 $0 < x < 4$ 时, 点 D 在 AB 上,

有 $S = S_{\triangle A'B'O'} - S_{\triangle ADO'}$.

$$\therefore S = \frac{1}{2}A'O' \times B'O' - \frac{1}{2}AO' \times DO'$$

把 $DO' = y = -\frac{3}{4}x + 3$, 代入,

$$\text{得 } S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times (4-x) \times \left(-\frac{3}{4}x + 3\right).$$

$$\therefore S = -\frac{3}{8}x^2 + 3x (0 < x < 4).$$

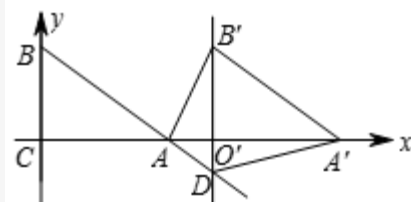
②如图(2), 当 $x > 4$ 时, 点 D 在 BA 延长线上,

∵ 平移 $\triangle AOB$ 得到 $\triangle A'O'B'$,

$$\therefore OO' = AA' = x, O'D = |y| = -y.$$

$$\therefore S = S_{\triangle AA'D} + S_{\triangle AA'B'}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}AA' \times B'O' + \frac{1}{2}AA' \times DO'$$



把 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 代入,

$$\text{得 } S = \frac{1}{2}x \times 3 + \frac{1}{2}x(-y) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = \frac{3}{8}x^2.$$

$$\text{综上, } S = \begin{cases} -\frac{3}{8}x^2 + 3, & 0 < x < 4 \\ \frac{3}{8}x^2, & x > 4 \end{cases}.$$

(3) 把 $S = \frac{10}{3}$ 代入 $S = -\frac{3}{8}x^2 + 3x$, 得 $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{20}{3} > 4$ (舍).

把 $x = \frac{4}{3}$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 3$, 得 $y = 2$.

$$\therefore D\left(\frac{4}{3}, 2\right).$$

把 $S = \frac{10}{3}$ 代入 $S = \frac{3}{8}x^2$, 得 $x_1 = -\frac{4}{3}\sqrt{5}$ (舍), $x_2 = \frac{4}{3}\sqrt{5}$ (舍).

【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】坐标系中的平移-图形的平移

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】根据条件写一次函数解析式

【知识点】函数自变量的取值范围

【知识点】函数解析式

【知识点】相似三角形与实际应用

经典再现

11. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(6, 0)$, 点 B 在 y 轴的正半轴上, $\angle ABO = 30^\circ$, 矩形 $CODE$ 的顶点 D, E, C 分别在 OA, AB, OB 上, $OD = 2$.

(1) 如图①, 求点 E 的坐标.

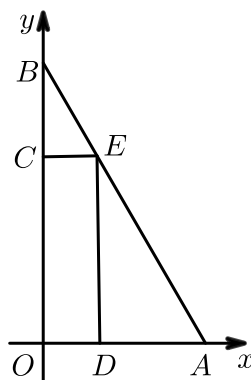


图 ①

(2) 将矩形 $CODE$ 沿 x 轴向右平移, 得到矩形 $C'O'D'E'$, 点 C, O, D, E 的对应点分别为 C', O', D', E' . 设 $OO' = t$, 矩形 $C'O'D'E'$ 与 $\triangle ABO$ 重叠部分的面积为 S .

① 图②, 当矩形 $C'O'D'E'$ 与 $\triangle ABO$ 重叠部分为五边形时, $C'E', D'E'$ 分别与 AB 相交于点 M, F , 试用含有 t 的式子表示 S , 并直接写出 t 的取值范围.

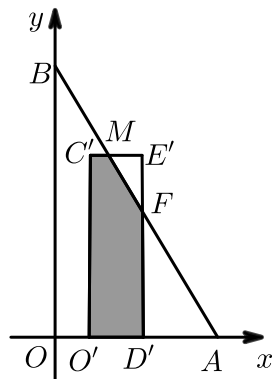


图 ②

② $\sqrt{3} \leq S \leq 5\sqrt{3}$ 时, 求 t 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $(2, 4\sqrt{3})$.

$$(2) \textcircled{1} S = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 8\sqrt{3}, 0 < t < 2.$$

$$\textcircled{2} \frac{5}{2} \leq t \leq 6 - \sqrt{2}.$$

【解析】 (1) 由点 $A(6, 0)$, 得 $OA = 6$,

又 $OD = 2$, 得 $AD = OA - OD = 4$,

在矩形 $CODE$ 中, 有 $ED \parallel CO$,

得 $\angle AED = \angle ABO = 30^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $AE = 2AD = 8$,

$\therefore$ 由勾股定理, 得 $ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = 4\sqrt{3}$, 有 $CO = 4\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2, 4\sqrt{3})$.

(2) ① 由平移知, $O'D' = 2$, $E'D' = 4\sqrt{3}$, $ME' = OO' = t$,

由 $E'D' \parallel BO$,

得 $\angle E'FM = \angle ABO = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle MEF$ 中,

得 $MF = 2ME' = 2t$,

$\therefore$ 由勾股定理, 得 $FE' = \sqrt{MF^2 - ME'^2} = \sqrt{3}t$,

$$\therefore S_{\triangle MFE'} = \frac{1}{2}ME' \cdot FE' = \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2,$$

$$\therefore S_{\text{矩形}C'O'D'E'} = O'D' \cdot E'D' = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{矩形}C'O'D'E' - SMFE'} = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2,$$

$$\therefore S = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 8\sqrt{3},$$

其中 t 的取值范围是 $0 < t < 2$.

$$\text{故答案为 } S = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 8\sqrt{3}, 0 < t < 2.$$

② ①当 $0 \leq t \leq 2$ 时,

$$S = 2 \cdot 4\sqrt{3} - \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{3}t,$$

$$S = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2,$$

$$t = 0 \text{ 时}, S_{\max} = 8\sqrt{3},$$

$$t = 2 \text{ 时}, S_{\min} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore 6\sqrt{3} \leq S \leq 8\sqrt{3},$$

②当 $2 < t \leq 4$ 时,

$$S = \frac{(4-t)\sqrt{3} + (6-t)\sqrt{3}}{2} \cdot 2,$$

$$S = -2\sqrt{3}t + 10\sqrt{3},$$

$$\text{当 } t = 2 \text{ 时}, S_{\max} = 6\sqrt{3},$$

$$\text{当 } t = 4 \text{ 时}, S_{\min} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore 2\sqrt{3} \leq S \leq 6\sqrt{3},$$

$$\text{当 } S = 5\sqrt{3} \text{ 时}, t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq t \leq 4 \text{ 时, 符合条件},$$

③当 $4 < t \leq 6$ 时,

$$S = \frac{(6-t)\sqrt{3}(6-t)}{2},$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(6-t)^2,$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 6\sqrt{3}t + 18\sqrt{3},$$

$$\text{当 } t = 4 \text{ 时}, S_{\max} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{当 } t = 6 \text{ 时}, S_{\min} = 0,$$

$$\therefore 0 \leq S \leq 2\sqrt{3},$$

$$\text{当 } S = \sqrt{3} \text{ 时}, t_1 = 6 + \sqrt{2} \text{ (舍)}, t_2 = 6 - \sqrt{2},$$

$$\therefore 4 < t \leq 6 - \sqrt{2} \text{ 时符合条件}.$$

$$\text{综上所述}, \frac{5}{2} \leq t \leq 6 - \sqrt{2}.$$

【标注】【能力】运算能力

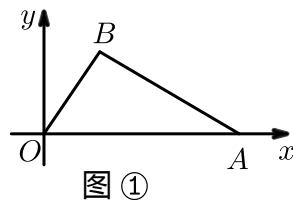
【知识点】矩形的性质

4. 存在性问题

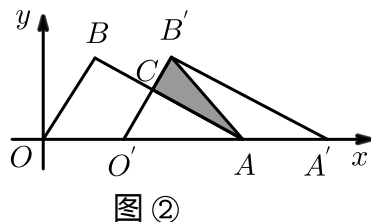
典题精练

12. 在平面直角坐标系中, 点 $A(4, 0)$, B 为第一象限内一点, 且 $OB \perp AB$, $OB = 2$.

(1) 如图①, 求点 B 的坐标.



(2) 如图②, 将 $\triangle OAB$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle O'A'B'$, 设 $OO' = m$, 其中 $0 < m < 4$. 连接 AB' , AB 与 $O'B'$ 交于点 C .



① 试用含 m 的式子表示 $\triangle AB'C$ 的面积 S , 并求出 S 的最大值.

② 当 $\triangle AB'C$ 为等腰三角形时, 求点 C 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $B(1, \sqrt{3})$.

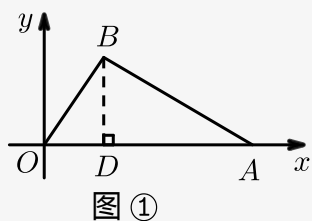
(2) ① $S = \frac{\sqrt{3}}{8} [-(m-2)^2 + 4]$, 当 $m = 2$ 时, $S_{\text{最大}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

② $C(5 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$.

【解析】 (1) $\because OB \perp AB$, $OA = 4$, $OB = 2$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$, $\angle OAB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$,

过点 B 做 $BD \perp OA$,



$$\therefore B(1, \sqrt{3}) .$$

(2) ① $\because \triangle A'O'B'$ 是 $\triangle OAB$ 平移得到 ,

$$\therefore \angle A'O'B' = \angle AOB = 60^\circ ,$$

$$\therefore O'B' \perp AB ,$$

$$\therefore OO' = m ,$$

$$\therefore AO' = 4 - m ,$$

$$O'C = \frac{1}{2}AO' = \frac{1}{2}(4 - m) ,$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AO' = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - m) ,$$

$$\therefore BC = AB - AC = \frac{\sqrt{3}}{2}m ,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}BC \cdot O'C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}m(4 - m)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[-(m - 2)^2 + 4] ,$$

$$\therefore \text{当 } m = 2 \text{ 时, } S_{\text{最大}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

② 由①有 , $AO' = 4 - m$, $O'C = \frac{1}{2}(4 - m)$, $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - m)$,

$$\therefore CB' = O'B' - O'C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(4 - m)$$

$$= \frac{1}{2}m ,$$

由平移得 $\angle ACB' = \angle ABO = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ACB'$ 为等腰三角形 ,

$$\therefore AC = B'C ,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - m) = \frac{1}{2}m ,$$

$$\therefore m = 6 - 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore O'C = \frac{1}{2}(4 - m) = 2\sqrt{3} - 2 ,$$

$$\therefore C(5 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}) .$$

【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】相似三角形的性质

【知识点】平行线分线段成比例定理

【知识点】解直角三角形

【知识点】坐标系中的平移-图形的平移

【知识点】坐标与距离

13. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$, 连接 BD , 将 $\triangle ABD$ 绕 B 点作顺时针方向旋转得到 $\triangle A'B'D'$ (B' 与 B 重合), 且点 D' 刚好落在 BC 的延长线上, $A'D'$ 与 CD 相交于点 E .

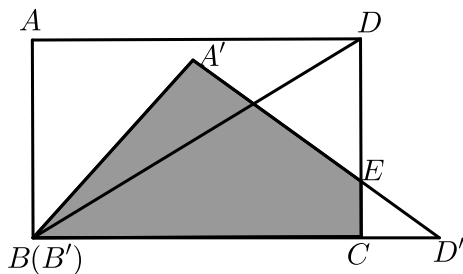


图 1

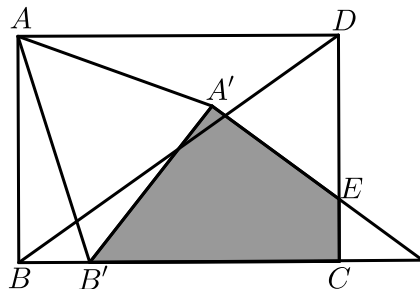


图 2

- (1) 求矩形 $ABCD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 重叠部分(如图1中阴影部分 $\triangle A'B'CE$)的面积.
- (2) 将 $\triangle A'B'D'$ 以每秒 2cm 的速度沿直线 BC 向右平移, 如图2, 当 B' 移动到 C 点时停止移动, 设矩形 $ABCD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 重叠部分的面积为 y , 移动的时间为 x , 求 y 关于 x 的函数关系式, 并指出自变量 x 的取值范围.
- (3) 若在(2)的平移过程中, 存在这样的时间 x , 使得 $\triangle AA'B'$ 成为等腰三角形, 请你直接写出满足条件的 x 的值.

【答案】(1) $\frac{45}{2}\text{cm}^2$.

(2) ①当 $0 \leq x < \frac{16}{5}$ 时, $y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 24$.
 ②当 $\frac{16}{5} \leq x \leq 4$ 时, $y = \frac{8}{3}x^2 - \frac{80}{3}x + \frac{200}{3}$.

(3) 存在, $0, \frac{3}{2}, \frac{6\sqrt{6}-9}{5}$.

【解析】(1) $\because AB = 6\text{cm}, AD = 8\text{cm},$

$$\therefore BD = 10\text{cm},$$

根据旋转的性质可知 $B'D' = BD = 10\text{cm},$

$$CD' = B'D' - BC = 2\text{cm},$$

$$\because \tan \angle B'D'A' = \frac{A'B'}{A'D'} = \frac{CE}{CD'},$$

$$\therefore \frac{6}{8} = \frac{CE}{2},$$

$$\therefore CE = \frac{3}{2}\text{cm},$$

$$\therefore S_{A'B'CE} = S_{\triangle A'B'D'} - S_{\triangle CED'},$$

$$= \frac{8 \times 6}{2} - 2 \times \frac{3}{2} \div 2,$$

$$= \frac{45}{2}(\text{cm}^2).$$

(2) ①当 $0 \leq x < \frac{16}{5}$ 时,

$$CD' = 2x + 2, CE = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle CD'E} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x,$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 24,$$

②当 $\frac{16}{5} \leq x \leq 4$ 时,

$$BC = 10 - 2x,$$

$$CE = \frac{4}{3}(10 - 2x),$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}(10 - 2x)^2 = \frac{8}{3}x^2 - \frac{80}{3}x + \frac{200}{3}.$$

(3) ①如图1, 当 $AB' = A'B'$ 时, $x = 0$ 秒,

②如图2, 当 $AA' = A'B'$ 时,

$$A'N = BM = BB' + B'M,$$

$$= 2x + \frac{18}{5},$$

$$A'M = NB = \frac{24}{5},$$

$$\therefore AN^2 + A'N^2 = 36,$$

$$\therefore \left(6 - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(2x + \frac{18}{5}\right)^2 = 36,$$

$$\text{解得 } x = \frac{6\sqrt{6}-9}{5} \text{ 秒或 } x = \frac{-6\sqrt{6}-9}{5} \text{ (舍),}$$

③如图2, 当 $AB' = AA'$ 时, $A'N = BM = BB' + B'M,$

$$= 2x + \frac{18}{5},$$

$$A'M = NB = \frac{24}{5},$$

$$\therefore AB^2 + BB'^2 = AN^2 + A'N^2,$$

$\therefore$

$$36 + 4x^2 = \left(6 - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(2x + \frac{18}{5}\right)^2$$

,

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

综上所述, 使得 $\triangle AA'B'$ 成为等腰三角形的 x 的值有, 0 秒, $\frac{3}{2}$ 秒, $\frac{6\sqrt{6}-9}{5}$ 秒.

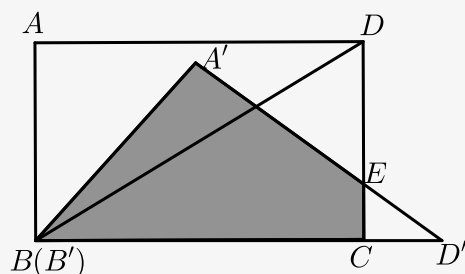


图 1

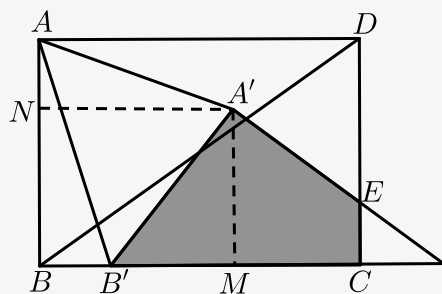


图 2

【标注】【知识点】二次函数与面积

14. 如图1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1, l_2 都经过点 $A(-6, 0)$, 它们与 y 轴的正半轴分别相交于点 B, C , 且 $\angle BAO = \angle ACO = 30^\circ$.

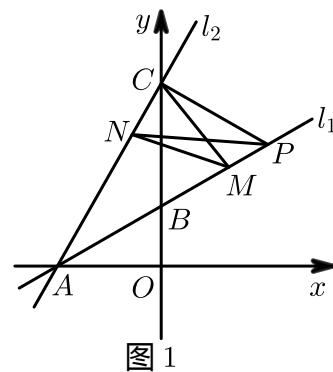


图 1

- (1) 求直线 l_1, l_2 的函数表达式.
- (2) 设 P 是第一象限内直线 l_1 上一点, 连接 PC , 有 $S_{\triangle ACP} = 24\sqrt{3}$. M, N 分别是直线 l_1, l_2 上的动点, 连接 CM, MN, NP , 求 $CM + MN + NP$ 的最小值.
- (3) 如图2, 在(2)的条件下, 将 $\triangle ACP$ 沿射线 PA 方向平移, 记平移后的三角形为 $\triangle A'C'P'$, 在平移过程中, 若以 A, C', P 为顶点的三角形是等腰三角形, 请直接写出所有满足条件的点 C' 的坐标.

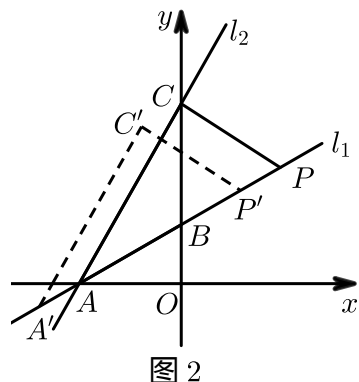


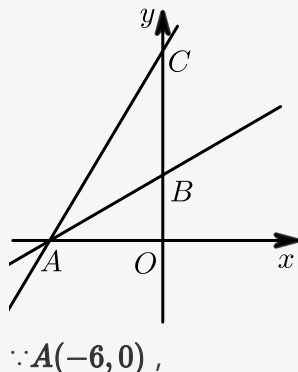
图 2

【答案】 (1) 直线 l_1 解析式 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$,
直线 l_2 解析式 $y = \sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$.

(2) $4\sqrt{21}$.

(3) $(-3, 5\sqrt{3})$ 或 $(3 - 3\sqrt{13}, 7\sqrt{3} - \sqrt{39})$ 或 $(-9 - 3\sqrt{13}, 3\sqrt{3} - \sqrt{39})$.

【解析】 (1) 如图,



$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA + \frac{1}{2} BC \cdot PQ &= 24\sqrt{3}, \\ \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \cdot PQ &= 24\sqrt{3}, \\ PQ &= 6, \end{aligned}$$

$$\text{把 } x = 6 \text{ 代入 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3},$$

$$\text{得 } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore P(6, 4\sqrt{3}),$$

$$\therefore OQ = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore CQ = OC - OQ = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle PCQ = \frac{PQ}{CQ} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle PCQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle PCQ + \angle ACO = 90^\circ,$$

作 C 关于 l_1 对称点 C_1 ,

$$\therefore \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C_1AB = 30^\circ,$$

$$\therefore C_1 \text{ 在 } x \text{ 轴上},$$

$$\text{且 } AC_1 = AC = 2OA = 12,$$

作 P 关于 l_2 对称点 P_1 , 连结 AP_1 ,

$$\therefore \angle PAC = \angle P_1AC, AP = AP_1,$$

$$\therefore \angle ACO = 30^\circ, \angle AOC = 90^\circ, \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle P_1AC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle P_1AC_1 = 90^\circ,$$

$$AP = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore AP_1 = AP = 8\sqrt{3},$$

连结 C_1P_1 交 l_1 于 N , l_2 于 M ,

此时 $CM + MN + NP$ 最小, 最小值即 C_1P_1 长,

$$\text{在 Rt}\triangle P_1AC_1 \text{ 中}, P_1C_1^2 = AP_1^2 + AC_1^2,$$

$$\therefore P_1C_1 = \sqrt{AP_1^2 + AC_1^2}$$

$$= \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 12^2}$$

$$= 4\sqrt{21},$$

即 $CM + MN + NP$ 最小值为 $4\sqrt{21}$.

(3) 如图,

$$\therefore PC'^2 = PA^2,$$

$$\therefore \frac{4}{3}a^2 - 8a + 48 = 192,$$

$$\text{解得 } a_1 = 3 - 3\sqrt{13}, a_2 = 3 + 3\sqrt{13} \text{ (舍)},$$

$$\therefore C'(3 - 3\sqrt{13}, 7\sqrt{3} - \sqrt{39}).$$

$$\textcircled{3} AC' = AP \text{ 时},$$

$$\text{设 } C'\left(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m + 6\sqrt{3}\right),$$

$$\therefore A(-6, 0), P(6, 4\sqrt{3}),$$

$$\therefore AC'^2 = (m + 6)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}m + 6\sqrt{3}\right)^2 = \frac{4}{3}m^2 + 24m + 144,$$

$$AP^2 = 192,$$

$$\therefore AC' = AP,$$

$$\therefore AC'^2 = AP^2,$$

$$\therefore \frac{4}{3}m^2 + 24m + 144 = 192,$$

$$\text{解得 } m_1 = -9 - 3\sqrt{13}, m_2 = -9 + 3\sqrt{13} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore C' \text{ 坐标 } (-9 - 3\sqrt{13}, 3\sqrt{3} - \sqrt{39}).$$

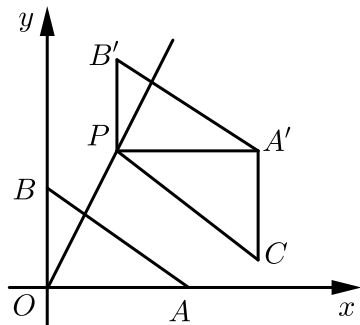
综上, $\triangle AC'P$ 为等腰三角形时, C' 坐标为 $(-3, 5\sqrt{3})$ 或 $(3 - 3\sqrt{13}, 7\sqrt{3} - \sqrt{39})$ 或 $(-9 - 3\sqrt{13}, 3\sqrt{3} - \sqrt{39})$.

【标注】【知识点】已知两点求一次函数解析式

5. 其他

典题精练

15. 如图所示, 直线 $y = kx (x \geq 0)$ 经过点 $P(2, 4)$, 已知点 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 连接 AB , 将 $\text{Rt}\triangle AOB$ 沿 OP 方向平移, 使点 O 移动到点 P , 得到 $\triangle A'PB'$. 以边 PA' 的中点为中心, 将 $\triangle A'PB'$ 按顺时针方向旋转 180° , 得到 $\triangle PA'C$.



(1) 求 k 的值.

(2) 连接 $B'C$ ，求直线 $B'C$ 的解析式。

(3) 请直接写出 $\triangle AOB$ 沿 OP 方向平移到 $\triangle A'PB'$ 的过程中，线段 AB 扫过的面积。

【答案】 (1) $k = 2$ 。

$$(2) y = -\frac{3}{2}x + 10。$$

(3) 22。

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = kx$ 经过点 $P(2, 4)$ ，

$$\therefore 4 = 2 \times k，$$

解得： $k = 2$ 。

(2) $\because$ $\text{Rt}\triangle AOB$ 沿 OP 方向平移，点 O 移动到点 P ，

由点 $(0, 0)$ 和点 $P(2, 4)$ 得：

A, B 两点是先向右平移2个单位，再向上平移4个单位得到 A', B' ，

$\therefore$ 由 $A(4, 0)$ 得 A' 为 $(6, 4)$ ，

由 $B(0, 3)$ 得 B' 为 $(2, 7)$ ，

又 $\because$ 以边 PA' 的中点 $(4, 4)$ 为中心，

将 $\triangle A'PB'$ 顺时针旋转 180° 得到 $\triangle PA'C$ ，

$\therefore$ 由旋转性质可得： $B'C$ 的中点为旋转中心 $(4, 4)$ ，

$\therefore$ 可求得：点 C 为 $(6, 1)$ ，

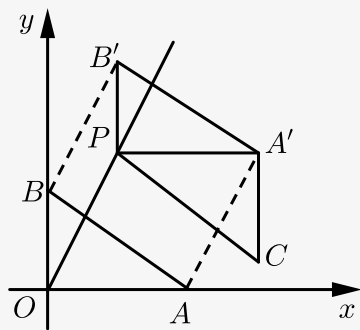
$\therefore$ 设 $B'C$ 为： $y = kx + b$ ，代入 $B'C$ 得：

$$\begin{cases} 2k + b = 7 \\ 6k + b = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = -\frac{3}{2} \\ b = 10 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 $B'C$ 的解析式为： $y = -\frac{3}{2}x + 10$ 。

(3) 如图所示，连接 AA', BB' ，

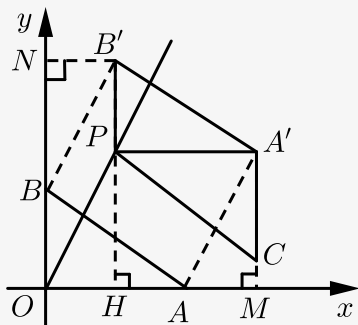


由题意得 $\triangle AOB$ 沿 OP 方向移动到 $\triangle A'PB'$ 过程中， AB 扫过的面积为四边形 $ABB'A'$ ，

分别过 B' 作 $B'N \perp y$ 相交于点 N ,

作 $A'M \perp x$ 轴交于点 M ,

过 B' 作 $B'H \perp x$ 交于点 H ,



$\therefore$ 四边形 $OHB'N$ 为矩形,

$$\therefore S_{\text{四边形}OHB'N} = x_{B'} \cdot y_{B'} = 2 \times 7 = 14,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } S_{\text{梯形}B'HMA'} &= \frac{1}{2} \times (B'H + A'M) \times (-m - n) \\ &= \frac{1}{2} \times (y_{B'} + y_{A'}) \times (x_{A'} - x_{B'}) \\ &= \frac{1}{2} \times (4 + 7) \times (6 - 2) \\ &= 22, \end{aligned}$$

$$\text{由图知: } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle BB'N} &= \frac{1}{2} \times BN \times B'N \\ &= \frac{1}{2} \times (y_{B'} - y_B) \times x_{B'} \\ &= \frac{1}{2} \times (7 - 3) \times 2 \\ &= 4, \end{aligned}$$

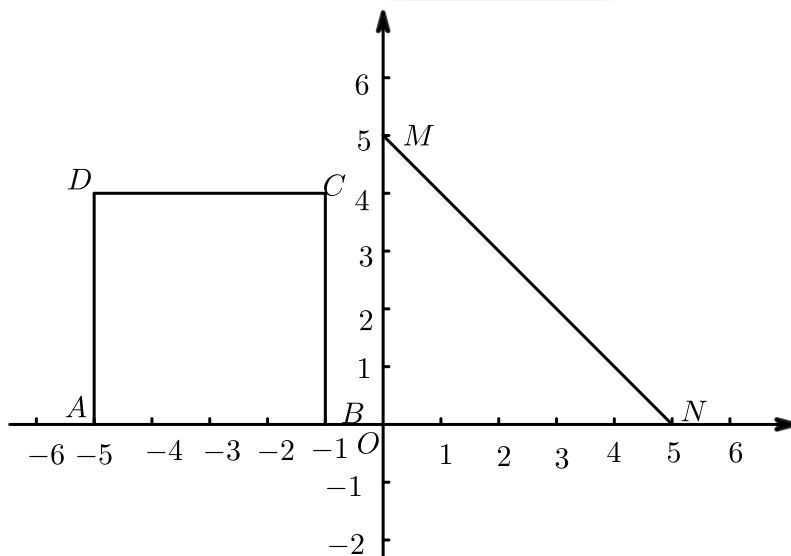
$$\begin{aligned} S_{\triangle AA'M} &= \frac{1}{2} \times AM \times A'M \\ &= \frac{1}{2} \times (x_{A'} - x_A) \times y_{A'} \\ &= \frac{1}{2} \times (6 - 4) \times 4 \\ &= 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四}ABB'A'} &= S_{\text{四}OHB'N} + S_{\text{梯形}B'HMA'} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle BB'N} - S_{\triangle AA'M} \\ &= 14 + 22 - 6 - 4 - 4 \\ &= 22. \end{aligned}$$

$\therefore$ 线段 AB 扫过的面积为22.

【标注】【知识点】坐标系中的旋转

16. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-5, 0)$, $B(-1, 0)$, $M(0, 5)$, $N(5, 0)$, 连接 MN , 以 AB 为边在 x 轴上方作正方形 $ABCD$.



- (1) 直接写出 C, D 两点的坐标；
- (2) 将正方形 $ABCD$ 向右平移 t 个单位长度，得到正方形 $A'B'C'D'$.
- ① 当点 C' 落在线段 MN 上时，结合图形直接写出此时 t 的值；
 - ② 横纵坐标都是整数的点叫做整点．记正方形 $A'B'C'D'$ 和三角形 OMN 重叠的区域（不含边界）为 W ，若区域 W 内恰有 3 个整点，直接写出 t 的取值范围．

【答案】 (1) $C(-1, 4)$ $D(-5, 4)$

(2) ① 2

② $2 < t \leq 3$ 或 $6 \leq t < 7$

【解析】 (1) $\because A(-5, 0) B(-1, 0)$

$$\therefore AB = 4$$

$\because$ 正方形 $ABCD$ 在 x 轴上方

$$\therefore C(-1, 4), D(-5, 4)$$

(2) ① $M(0, 5), N(5, 0)$,

设 MN 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b = 5 \\ 5k + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = 5 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$l_{MN} : y = -x + 5,$$

$$\text{当 } y = 4 \text{ 时 } -x + 5 = 4, x = 1,$$

$$\therefore (1, 4) \text{ 在 } MN \text{ 上,}$$

$\because$ 正方形 $ABCD$ 向右平移 t 个单位, C' 落在 MN 上,

$$\therefore C'(1, 4),$$

又 $\because C(-1, 4)$,

$$\therefore t = 1 - (-1) = 2.$$

② 如图所示

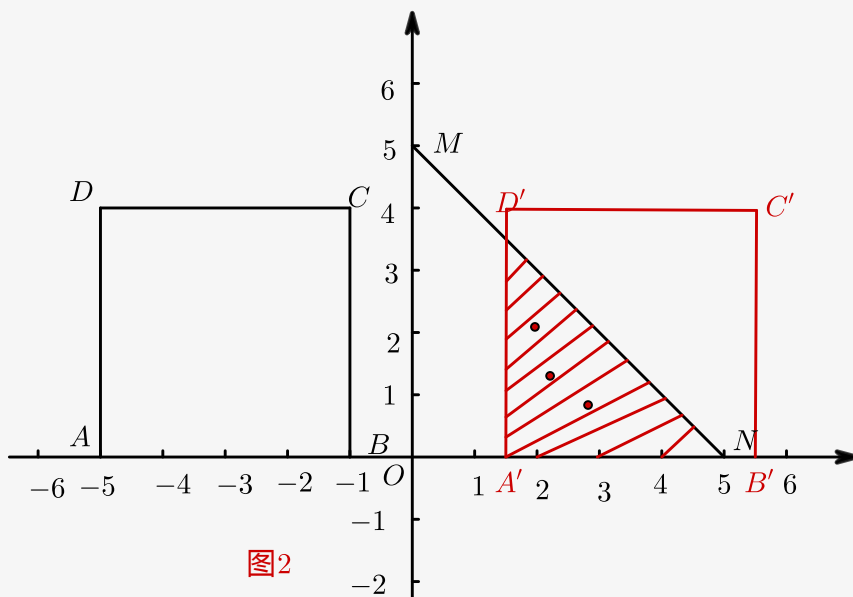


图2

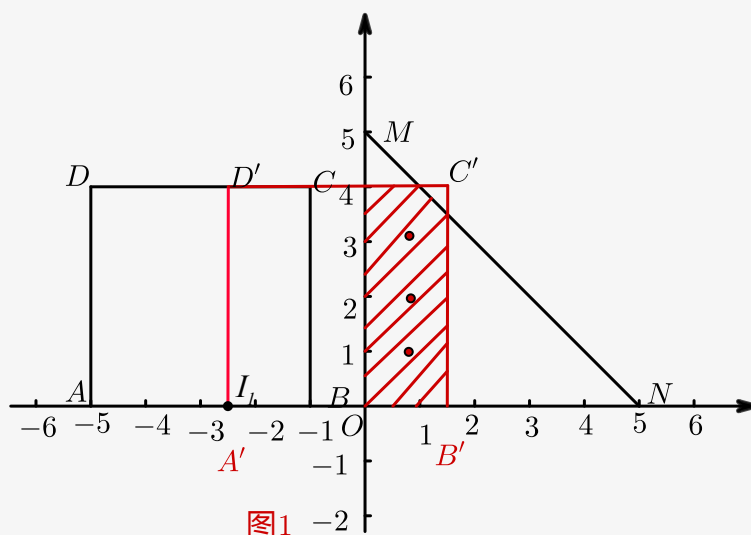


图1

当 B' 在 $(1, 0)$ 和 $(2, 0)$ 之间, 重叠部分如图1所示

三个整点分别为 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$

此时 $1 - (-1) < t \leq 2 - (-1)$

$$\therefore 2 < t \leq 3$$

当 A' 在 $(1, 0)$ 和 $(2, 0)$ 之间时, 重叠部分如图2所示:

三个整点分别为 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$,

此时 $1 - (-5) \leq t < 2 - (-5)$

$$\therefore 6 \leq t < 7,$$

综上所述, 当重叠部分有三个整点时, $2 < t \leq 3$ 或 $6 \leq t < 7$.

【标注】【知识点】平移的性质

【知识点】正方形的性质

【知识点】根据条件写一次函数解析式

【知识点】坐标与距离

【知识点】坐标系中的平移

【知识点】象限内坐标的特征

【能力】推理论证能力